

Voordracht door T.J. Terpstra in de serie  
Actualiteiten op 23 Februari 1952.

Het bepalen van een betrouwbaarheidsinterval voor de kans dat een normaal verdeelde grootheid een zekere waarde overschrijdt uit het gemiddelde en de gemiddelde range van een aantal steekproeven.

### 1. Inleiding.

Ondersteld wordt, dat een stochastische grootheid  $\underline{x}$ <sup>1)</sup> op een collectie (universum) een normale verdeling bezit met gemiddelde  $\mu$  en spreiding  $\sigma$ .

De kans P, dat  $\underline{x}$  een gegeven waarde a overschrijdt, wordt dan gegeven door

$$P = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_a^{\infty} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{a-\mu}{\sigma}}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}u^2} du. \quad (1.1)$$

Wanneer de werkelijke waarden van de parameters  $\mu$  en  $\sigma$  onbekend zijn, is de grootheid P eveneens onbekend.

Voor P kan men nu een schatting geven door een betrouwbaarheidsinterval  $[p_1, p_2]$  te berekenen, waarin de werkelijke waarde van P ligt, behoudens een gegeven onbetrouwbaarheid  $\alpha$ . Dit betrouwbaarheidsinterval kan volgens de methode van Johnson and Welch [1] bepaald worden uit het gemiddelde  $\bar{x}$  en de spreiding s van een steekproef  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Men bepaalt dan eerst een betrouwbaarheidsinterval voor de grootheid  $\frac{a-\mu}{\sigma}$ , waaruit met behulp van (1.1) het gevraagde betrouwbaarheidsinterval voor P volgt.

Het bovenstaande probleem is ontleend aan de kwaliteitscontrôle, waar het vaak voorkomt, dat een grote partij goederen op een zeker kwaliteitskenmerk  $\underline{x}$  gecontroleerd wordt. Ligt de x van een product beneden een vaste tolerantiegrens a, dan wordt het product goedgekeurd, is x groter dan a, dan wordt het afgekeurd.

Wanneer  $\underline{x}$  op de gehele collectie normaal verdeeld is, stelt P de fractie defecte exemplaren uit de collectie voor. Voor deze onbekende fractie P kan men dan een schatting geven door een betrouwbaarheidsinterval  $[p_1, p_2]$  te berekenen.

Een praktisch bezwaar van bovenstaande methode is, dat bij regelmatige toepassing de berekening van s nogal wat tijd gaat vergen, hetgeen de

1) Het stochastische karakter van een grootheid x wordt door onderstreping van de variabele aangeduid.



contrôle, b.v. van een serieproduct, moeilijker maakt. Deze  $s$  wordt namelijk uit de steekproefwaarden  $x_1, x_2, \dots, x_N$  berekend volgens de formule

$$s^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2,$$

met

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i.$$

Wanneer de producten kostbaar zijn, zal men er niet van afzien bovenstaande methode te gebruiken, daar  $s$  de meest efficiënte schatting van  $\sigma$  is en dus gemiddeld een zo klein mogelijk betrouwbaarheidsinterval voor  $P$  zal geven. Meestal worden echter grote hoeveelheden goedkope producten gecontroleerd en in die gevallen zal men de voorkeur geven aan een minder efficiënte schatting van  $\sigma$ , die echter gemakkelijker uit de steekproefwaarden berekend kan worden.

Patnaik heeft voor enkele speciale gevallen aangetoond, dat de grootheid  $\frac{w_{m,n}}{c(m,n)}$ , waarin  $w_{m,n}$  de gemiddelde range is van  $m$  steekproeven van ieder  $n$  waarnemingen en  $c(m,n)$  een geschikt gekozen constante, zeer goed als schatting van de spreiding  $\sigma$  gebruikt kan worden en resultaten geeft, die maar zeer weinig afwijken van die, welke bereikt worden met behulp van de meest efficiënte schatting  $s$  van  $\sigma$  [5].

In de volgende paragrafen zullen we aangeven op welke wijze dit resultaat van Patnaik, tezamen met de resultaten van Johnson en Welch gebruikt kunnen worden om een betrouwbaarheidsinterval voor  $P$  te berekenen uit het gemiddelde  $\bar{x}$  en de gemiddelde range  $w_{m,n}$  van  $m$  steekproeven van ieder  $n$  waarnemingen. Bovendien wordt aan de hand van een aantal steekproeven uit de tafel met "random normal deviates" van Wold (1948) nagegaan, hoeveel deze betrouwbaarheidsintervallen afwijken van die, berekend met behulp van het gemiddelde  $\bar{x}$  en de spreiding  $s$ .

## 2. De theorie van de betrouwbaarheidsintervallen.

Wanneer  $x$  een stochastische grootheid is, met een waarschijnlijkheidsverdeling, die op een onbekende parameter  $\theta$  na geheel bekend is, kan men de vraag stellen uit een aantal waarnemingen van  $x$  een schatting van de werkelijke waarde van  $\theta$  te geven. Een dergelijke schatting kan men nu geven met behulp van een betrouwbaarheidsinterval.

Uit de steekproefwaarden  $x_1, x_2, \dots, x_N$  voor  $x$  worden dan twee waarden  $\theta_1$  en  $\theta_2$  berekend, welke twee waarden een interval  $[\theta_1, \theta_2]$  vormen, waarin de werkelijke waarde van  $\theta$  ligt, behoudens een gegeven onbetrouwbaarheid  $\alpha$ . Dit laatste betekent, dat bij een serie bepalingen van betrouwbaarheidsintervallen, het interval in een fractie  $\alpha$  van de gevallen zodanig zal uitvallen, dat het  $\theta$  niet bevat.

Het algemene principe ter bepaling van een betrouwbaarheidsinter-



val 1 is het volgende: zij  $\mathcal{T}$  een toets voor de hypothese  $\Theta = \Theta_0$ , dan is  $\mathcal{T}$  de verzameling van al die waarden  $\Theta_0$ , die bij toepassing van  $\mathcal{T}$  op grond van de gevonden waarnemingen  $x_1, x_2, \dots, x_N$  niet voor verwerping in aanmerking komen. Is  $\mathcal{T}$  toegepast met een onbetrouwbaarheidsdrempel  $\alpha$ , dan is dit ook de onbetrouwbaarheid van het betrouwbaarheidsinterval.

### 3. De niet - centrale t - verdeling.

Daar zowel bij het bepalen van een betrouwbaarheidsinterval voor  $P$  uit het gemiddelde  $\bar{x}$  en de spreiding  $s$  der waarnemingen, als bij het bepalen van een betrouwbaarheidsinterval voor  $P$  uit het gemiddelde  $\bar{x}$  en de gemiddelde range  $w_{m,n}$  van  $m$  steekproeven van ieder  $n$  waarnemingen, gebruik wordt gemaakt van de niet-centrale t-verdeling, zullen we deze verdeling eerst iets nader beschouwen.

Een niet-centrale t-verdeling met parameter  $\Theta$  en  $f$  vrijheidsgraden is de verdeling van de grootheid

$$t = \frac{z + \Theta}{u},$$

waarin  $z$  een normaal verdeelde grootheid is met gemiddelde 0 en spreiding 1 en  $u$  onafhankelijk verdeeld is van  $z$  en wel zodanig, dat  $fu^2$  een  $\chi^2$ -verdeling bezit met  $f$  vrijheidsgraden.

Daar de grootheden  $z$  en  $u$  onafhankelijk van elkaar verdeeld zijn, is de simultane verdelingsdichtheid  $f(z,u)$  het product van de verdelingsdichtheden  $g(z)$  en  $h(u)$ , met

$$g(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} \quad (3.1)$$

$$h(u) = C \cdot e^{-\frac{1}{2}fu^2} u^{f-1} \quad (3.2)$$

en

$$C = \left[ \Gamma\left(\frac{f}{2}\right) \right]^{-1} 2^{-\left(\frac{f}{2} - 1\right)} f^{\frac{f}{2}}$$

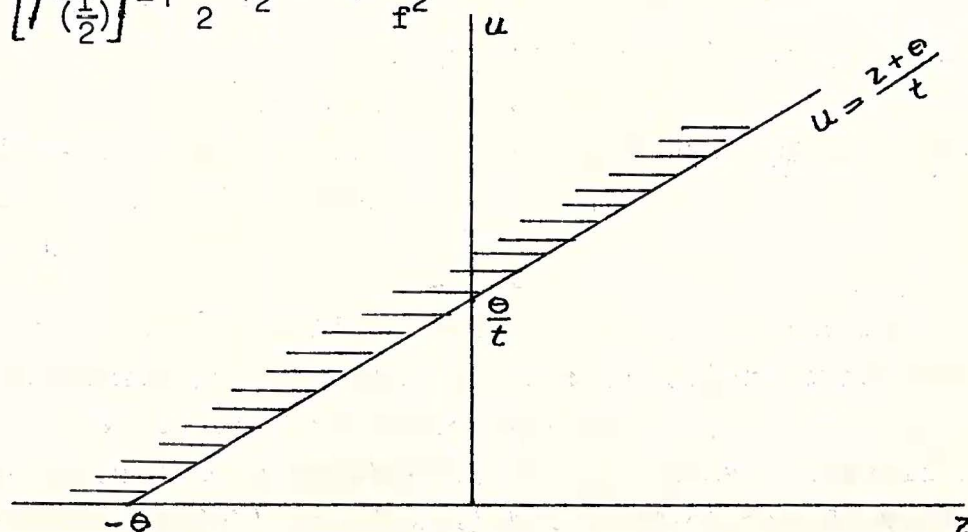


fig. 1

Noemen wij de verdelingsfunctie van  $t$  nu  $F(t; \Theta, f)$ , dan is (zie fig.1):



$$F(t; \Theta, f) = P[t \leq t | \Theta, f] = C \int_0^\infty h(u) \left[ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-tu+\Theta}^{tu-\Theta} e^{-\frac{1}{2}v^2} dv \right] du.$$

Dus is

$$F(t; \Theta, f) = C \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}fu^2} u^{f-1} \left[ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-tu+\Theta}^{tu-\Theta} e^{-\frac{1}{2}v^2} dv \right] du$$

$$\text{met } C = \left[ \Gamma\left(\frac{f}{2}\right) \right]^{-1} 2^{-(\frac{f}{2}-1)} \cdot \frac{f^{\frac{f}{2}}}{f^2}. \quad (3.3)$$

4. Het berekenen van een betrouwbaarheidsinterval voor P uit het gemiddelde  $\bar{x}$  en de spreiding  $s$ .

Zoals in § 3 reeds opgemerkt is, komt het bepalen van een betrouwbaarheidsinterval voor P neer op het bepalen van een betrouwbaarheidsinterval voor de grootheid  $\eta = \frac{a-\mu}{\sigma}$ .

Wanneer het interval  $[\eta_1, \eta_2]$  een betrouwbaarheidsinterval voor  $\eta$  is met onbetrouwbaarheidscoëfficiënt  $\alpha$ , dan is het interval  $[p_1, p_2]$  met

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\eta_1}^\infty e^{-\frac{1}{2}u^2} du \\ \text{en} \\ p_2 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\eta_2}^\infty e^{-\frac{1}{2}u^2} du \end{aligned} \quad (4.1)$$

het gevraagde betrouwbaarheidsinterval voor P. Het betrouwbaarheidsinterval voor  $\eta$  kan bepaald worden uit het gemiddelde  $\bar{x}$  en de spreiding  $s$  van de waarnemingen  $x_1, x_2, \dots, x_N$ , daar de grootheid

$$t_1 = \sqrt{N} \frac{a-\bar{x}}{s} = \frac{\sqrt{N} \frac{a-\mu}{\sigma} - \sqrt{N} \frac{\bar{x}-\mu}{\sigma}}{\frac{s}{\sigma}} \quad (4.2)$$

een niet-centrale t-verdeling bezit met parameter  $\Theta = \sqrt{N} \frac{a-\mu}{\sigma} = \sqrt{N} \cdot \eta$  en  $f = N-1$  vrijheidsgraden. Dit laatste is direct duidelijk, daar het gemiddelde  $\bar{x}$  en de spreiding  $s$  onderling onafhankelijk verdeeld zijn, de grootheid  $\sqrt{N} \frac{\bar{x}-\mu}{\sigma}$  normaal verdeeld is met gemiddelde 0 en spreiding 1 en de grootheid  $(N-1) \frac{s^2}{\sigma^2}$  een  $\chi^2$ -verdeling bezit met  $N-1$  vrijheidsgraden. De verdelingsfunctie  $F(t_1; \Theta, f)$  van de grootheid  $t_1$  vinden we door substitutie van de waarden

$$\Theta = \sqrt{N} \frac{a-\mu}{\sigma} \quad (4.3)$$

en

$$f = N-1$$

in (3.3).

Wanneer  $t_1^*$  de uit de steekproef bepaalde waarde voor  $t_1$  is, wordt een betrouwbaarheidsinterval  $[\Theta_1, \Theta_2]$  voor  $\Theta$  met onbetrouwbaarheid  $\alpha$  (zie § 2) gevonden, door  $\Theta_1$  en  $\Theta_2$  op te lossen uit:



$$P \left[ t_1 \geq t_1^* | \Theta = \Theta_1 \right] = 1 - F(t_1^*; \Theta_1, N-1) = \alpha_1$$

en

$$P \left[ t_1 \leq t_1^* | \Theta = \Theta_2 \right] = F(t_1^*; \Theta_2, N-1) = \alpha - \alpha_1.$$

(4.4)

Stellen we  $\alpha_1 = \frac{1}{2} \alpha$ , dan vinden we uit (4.4) een z.g. symmetrisch betrouwbaarheidsinterval voor  $\Theta$  met onbetrouwbaarheid  $\alpha$ .

Voor het berekenen van de waarden  $\Theta_1$  en  $\Theta_2$  uit (4.4) kan men gebruik maken van de tabellen van Johnson and Welch [1].

Door substitutie van de gevonden waarden van  $\eta_1 = \frac{\Theta_1}{\sqrt{N}}$  en  $\eta_2 = \frac{\Theta_2}{\sqrt{N}}$  in (4.1) vindt men tenslotte het gevraagde betrouwbaarheidsinterval  $[p_1, p_2]$  voor  $P$ . De onbetrouwbaarheid van dit interval is eveneens  $\alpha$ .

### 5. Het bepalen van een betrouwbaarheidsinterval voor $P$ uit het gemiddelde $\bar{X}$ en de gemiddelde range $\bar{w}_{m,n}$ van $m$ steekproeven van $n$ waarnemingen.

Bij deze methode wordt i.p.v. de spreiding  $s$  de gemiddelde range  $\bar{w}_{m,n}$  als schatting van de spreiding  $\sigma$  gebruikt.

De exacte verdelingsdichtheid van  $\frac{\bar{w}_{m,n}}{\sigma}$  voor  $m$  steekproeven van de uitgebreidheid  $n$  uit een normale verdeling met spreiding  $\sigma$  is van ingewikkelde aard en moeilijk te berekenen. Patnaik heeft echter een benadering gegeven van deze verdelingsdichtheid, welke maar zeer weinig afwijkt van de exacte verdeling [4].

#### 5.1 Een approximatieve verdeling van de gemiddelde range $\bar{w}_{m,n}$ .

Patnaik ging uit van de veronderstelling, dat de grootheid  $\frac{\bar{w}_{m,n}}{c(m,n)\sigma}$  bij passende keuze van een constante  $c(m,n)$  ongeveer dezelfde verdelingsdichtheid bezit als de grootheid  $\frac{s}{\sigma}$  voor een steekproef van de uitgebreidheid  $N = mn$  uit een normale verdeling, dus een  $\Gamma$ -verdeling, echter met een gereduceerd aantal vrijheidsgraden  $\nu(m,n)$ .

Hij veronderstelt dus, dat de grootheid

$$y^2 = \nu(m,n) \left( \frac{\bar{w}_{m,n}}{c(m,n)\sigma} \right)^2$$

bij benadering verdeeld is als een grootheid  $y'^2$ , die een  $\chi^2$ -verdeling bezit met  $\nu(m,n)$  vrijheidsgraden.

De coëfficiënten  $c(m,n)$  en  $\nu(m,n)$  worden bepaald door gelijkstelling van eerste en tweede momenten van de exacte verdeling van  $\frac{\bar{w}_{m,n}}{\sigma}$  en

$$y = \frac{c(m,n)}{\sqrt{\nu(m,n)}} y'.$$

Noemen wij

$$E\left(\frac{\bar{w}_{m,n}}{\sigma}\right) = E\left(\frac{\bar{w}_n}{\sigma}\right) = d_n = M$$

en

$$\text{Var}\left(\frac{\bar{w}_{m,n}}{\sigma}\right) = \frac{1}{m} \text{Var}\left(\frac{\bar{w}_n}{\sigma}\right) = V,$$



dan kunnen  $M$  en  $V$  berekend worden uit de waarden voor gemiddelde en variantie van  $\frac{W_n}{\sigma^2}$ , welke bepaald zijn uit de tabellen voor de verdelingsfunctie van de range  $\frac{W_n}{\sigma}$  (Hartley and Pearson (1942)).

Daar

$$\mathcal{E}(\underline{y}) = \frac{c}{\sqrt{v}} \sqrt{2} \frac{\Gamma(\frac{v+1}{2})}{\Gamma(\frac{v}{2})},$$

en

$$\text{Var}(\underline{y}) = \frac{c^2}{v} \left[ v - 2 \left\{ \frac{\Gamma(\frac{v+1}{2})}{\Gamma(\frac{v}{2})} \right\}^2 \right],$$

voldoen  $v(m,n)$  en  $c(m,n)$  aan de volgende twee vergelijkingen:

$$\begin{aligned} M &= \frac{c}{\sqrt{v}} \sqrt{2} \frac{\Gamma(\frac{v+1}{2})}{\Gamma(\frac{v}{2})} \\ \text{en} \\ V &= \frac{c^2}{v} \left[ v - 2 \left\{ \frac{\Gamma(\frac{v+1}{2})}{\Gamma(\frac{v}{2})} \right\}^2 \right]. \end{aligned}$$

Met behulp van de ontwikkeling van Stirling voor de  $\Gamma$ -functie vindt Patnaik uit bovenstaande twee vergelijkingen de volgende twee approximatieve oplossingen voor  $v(m,n)$  en  $c(m,n)$ :

$$\frac{1}{v} = -2 + 2 \sqrt{1 + 2j},$$

met

$$j = \frac{V}{M^2} + \frac{1}{16v^3}$$

en

$$c(m,n) = M \left\{ 1 + \frac{1}{4v} + \frac{1}{32v^2} - \frac{5}{128v^3} \right\};$$

(5.1.1)

voor  $n = 3, 4, \dots, 10$  en  $m = 1, 2, \dots, 5$  zijn de waarden van  $v(m,n)$  en  $c(m,n)$  berekend.

#### Opmerking:

Voor het in de numerieke voorbeelden (zie § 5.3) toegepaste steekproefschema zijn voor  $m$  en  $n$  resp. de getallen 3 en 8 gekozen, daar de range van groepen van 7 à 8 waarnemingen een "zo goed mogelijke" schatting van de spreiding geeft [3] en een steekproef van 24 waarnemingen in de praktijk zeer bruikbaar is.

Voor de met  $m = 3$  en  $n = 8$  corresponderende waarden van  $v(m,n)$  en  $c(m,n)$  zijn met behulp van (5.1.1) resp. de waarden 2,8850 en 18,328 gevonden.

Om te controleren of bovengenoemde benadering van de verdeling van de range goed is, is voor  $m = 1$  en  $n = 8$ , dus voor één enkele steekproef van de uitgebreidheid 8, op numerieke wijze de benaderde verdelingsfunctie van de range bepaald en vergeleken met de exacte, door Hartley en Pearson getabelleerde verdelingsfunctie [4]. Voor  $m = 3$  is deze numerieke vergelijking niet direct uit te voeren, daar de exacte verdelingsfunctie van de range alleen maar getabellerd is voor één enkele steekproef.

De onderstaande numerieke resultaten werden hierbij gevonden, waaruit blijkt, dat de aangepaste verdeling van  $\underline{w}_{1,8}$  iets "platter" is dan de exacte.

Men mag aannemen, dat het verschil tussen de overeenkomstige verdelingsfuncties voor  $m = 3$  en  $n = 8$  ook klein is.

De exacte en benaderde verdelingsfunctie van  $\underline{w}_{1,8}$ :

w	Exacte F(w)	Benaderde F(w)	Vershil
0,000	0,0000	0,0000	0,0000
0,498	0,0000	0,0000	0,0000
1,220	0,0109	0,0131	+0,0022
1,575	0,0461	0,0500	+0,0035
1,876	0,1086	0,1111	+0,0025
2,113	0,1892	0,1904	+0,0012
2,336	0,2816	0,2800	-0,0016
2,818	0,5131	0,5065	-0,0066
3,228	0,6928	0,6912	-0,0016
3,522	0,8006	0,7977	-0,0029
3,922	0,8982	0,8988	+0,0006
4,285	0,9498	0,9520	+0,0022
4,726	0,9811	0,9833	+0,0022
5,502	0,9975	0,998	+0,0005
6,757	1,0000	1,0000	0,0000

## 5.2 Het berekenen van een betrouwbaarheidsinterval voor P uit het gemiddelde $\bar{x}$ en de gemiddelde range $\underline{w}_{m,n}$ :

Daar voor een steekproef uit een normale verdeling het gemiddelde  $\bar{x}$  en de range  $\underline{w}$  onafhankelijk verdeeld zijn (E. Lord (1947), p.61 en 62) en de statistische grootheid

$$t_2 = \sqrt{N} \frac{a - \bar{x}}{\frac{\underline{w}_{m,n}}{c(m,n)}}$$

als volgt geschreven kan worden:

$$t_2 = \frac{\sqrt{N} \frac{a - \mu}{\sigma} + \sqrt{N} \frac{\mu - \bar{x}}{\sigma}}{\frac{\underline{w}_{m,n}}{c(m,n)\sigma}},$$

bezit  $t_2$  (zie § 3) bij benadering een niet-centrale t-verdeling met parameter

$$\theta = \sqrt{N} \frac{a - \mu}{\sigma},$$

en  $f = \nu(m,n)$  vrijheidsgraden (zie § 5.1).

Door substitutie van deze waarden in (3.3) vinden we de verdelingsfunctie



$F(t_2; \theta, f)$  van  $t_2$ .

Het berekenen van een betrouwbaarheidsinterval voor  $P$  met onbetrouwbaarheid  $\alpha$  gaat dus op geheel analoge wijze als in § 4.

Wanneer  $t_2^*$  de uit de steekproef bepaalde waarde van  $t_2$  is, wordt het betrouwbaarheidsinterval  $[\theta_1, \theta_2]$  voor  $\theta$  met onbetrouwbaarheid  $\alpha$  bepaald uit

$$P[t_2 \geq t_2^* | \theta = \theta_1] = 1 - F(t_2^*; \theta_1, \nu(m, n)) = \alpha_1$$

en

$$P[t_2 \leq t_2^* | \theta = \theta_2] = F(t_2^*; \theta_2, \nu(m, n)) = \alpha - \alpha_1,$$

met  $0 \leq \alpha_1 \leq \alpha$ .

Het gevraagde betrouwbaarheidsinterval  $[p_1, p_2]$  voor  $P$  met onbetrouwbaarheid  $\alpha$  wordt dan gegeven door:

$$p_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{\theta_1}{\sqrt{N}}}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}u^2} du$$

en

$$p_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{\theta_2}{\sqrt{N}}}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}u^2} du.$$

### 5.3 De numerieke resultaten.

Met behulp van een aantal steekproeven uit de tafel met "random normal deviates" van Wold (1948) zijn volgens de exacte methode en de benaderingsmethode betrouwbaarheidsintervallen berekend voor  $P$ , met

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 0,025.$$

Voor de grens  $a$  zijn de waarden 0,80 en 1,40 gekozen, welke corresponderen met de werkelijke overschrijdingskansen  $P = 0,2119$  en  $P = 0,0808$  (de steekproeven komen immers uit een normale collectie met gemiddelde 0 en spreiding 1).

De gevonden numerieke resultaten zijn vermeld op bijlage I.

Naar aanleiding van deze resultaten valt op te merken, dat met behulp van de tweede (benaderings)methode, waarbij gebruik gemaakt wordt van het gemiddelde  $\bar{x}$  en de gemiddelde range  $w_{3,8}$ , betrouwbaarheidsintervallen voor  $P$  worden gevonden, die zowel voor  $a = 0,80$  als voor  $a = 1,40$  weinig verschillen van die, berekend met behulp van de exacte methode, waarbij  $s$  als schatting van  $\sigma$  gebruikt wordt.

De intervallen zijn steeds iets groter, welk effect voor  $a = 1,40$  sterker is dan voor  $a = 0,80$ . Voor kleine en grote waarden van  $\frac{a - \bar{x}}{s}$  nadert het verschil naar 0 (zie grafiek 1).

Het gedrag van de lengte van het betrouwbaarheidsinterval is te verklaren uit het verlies aan doeltreffendheid ten gevolge van het gebruik van  $w_{3,8}$  i.p.v.  $s$ . Bij de tweede (benaderings)methode wordt namelijk een  $\chi^2$ -verdeling gebruikt als benadering van de exacte verdeling van de grootheid  $\frac{w_{3,8}}{s} \sqrt{\frac{N-1}{3,8}}$ . Deze  $\chi^2$ -verdeling bezit echter minder vrijheidsgraden dan die voor  $(N-1)s^2$ , resp.  $\nu(3,8) = 18,328$  en  $N-1 = 23$ ,



zodat de verdelingen van  $\left(\frac{w_{3,8}}{c(3,8)}\right)^{\lambda}$  en  $\frac{\lambda}{s}$  het in fig. 2 geschetste gedrag t.o.v. elkaar vertonen.

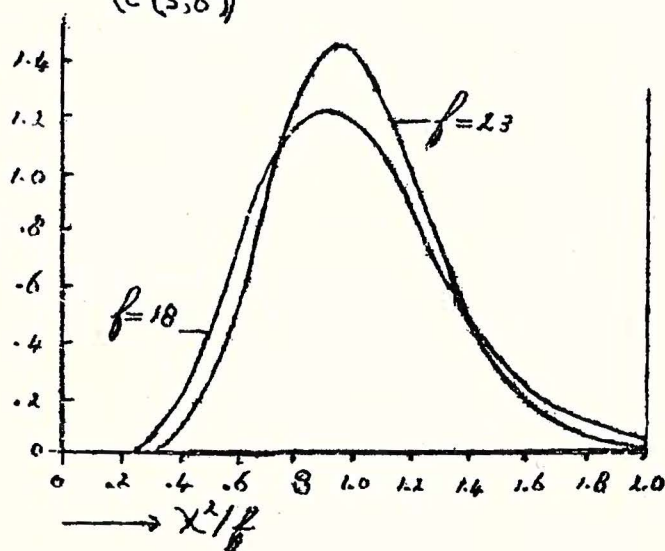


fig. 2

Dit zal echter ten gevolge hebben, dat de met de gemiddelde range  $w_{3,8}$  corresponderende niet-centrale t-verdeling dikkere staarten heeft, dan die, welke behoort bij de spreiding  $s$ . Met de benaderingsmethode worden daarom bij kleine  $\alpha$  grotere betrouwbaarheidsintervallen voor

$\Theta = \sqrt{N} \frac{a-\bar{x}}{\sigma}$  gevonden, waardoor systematisch grotere betrouwbaarheidsintervallen voor P optreden.

Met behulp van de gevonden resultaten voor de betrouwbaarheidsintervallen van P en de bijbehorende waarden van  $\frac{a-\bar{x}}{w_{3,8}}$  en  $\frac{a-\bar{x}}{s}$  is een grafiek gemaakt, waarin  $p_1$  en  $p_2$  tegen  $\frac{a-\bar{x}}{w_{3,8}}$  en  $\frac{a-\bar{x}}{s}$  zijn uitgezet (zie grafiek 1).

De verhouding van de schalen, volgens welke  $\frac{a-\bar{x}}{w_{3,8}}$  en  $\frac{a-\bar{x}}{s}$  zijn uitgezet, is  $1 : c(3,8) = 1 : 2,8850$ , daar de grootheid  $\frac{w_{3,8}}{c(3,8)}$  als schatting van  $\sigma$  gebruikt wordt.

#### Litteratuur:

1. N.L. Johnson en B.L. Welch (1940), Applications of the non-central t-distribution, Biometrika 31, p.362-389.
2. M.G. Kendall (1947), The Advanced Theory of Statistics, London.
3. E. Lerd (1947), The use of range in place of standard deviation in the t-test, Biometrika 34, p.41-67.
4. E.S. Pearson en H.O. Hartley (1942), The probability-integral of the range in samples of n observations from a normal population, Biometrika 32, p.301-310.
5. P.B. Patnaik (1950), The use of range as an estimator of variance in statistical tests, Biometrika 37, p.78-88.
6. H. Wold (1948), Random normal deviates, Cambridge University Press.



Bijlage I

$\alpha$	$\bar{x}$	$s$	$\frac{a-\bar{x}}{s}$	$p_1$	$p_2$	$\frac{D_s}{p_2-p_1}$	$w_{3,8}$	$\frac{a-\bar{x}}{w}$	$p_1$	$p_2$	$\frac{D_w}{p_2-p_1}$	$D_w - D_s$
<u><math>a=0,80</math></u>												
1	-0,35	0,8778	1,3101	0,0328	0,2224	0,1896	2,43	0,4733	0,0257	0,2230	0,1973	0,0077
2	-0,32	1,1564	0,9685	0,0737	0,3174	0,2437	2,94	0,3810	0,0524	0,2884	0,2360	-0,0077
3	0,18	1,1290	0,5492	0,1647	0,4546	0,2899	3,44	0,1802	0,1718	0,4685	0,2967	0,0068
→ 4	0,48	1,2544	0,2551	0,2547	0,5612	0,3065	3,36	0,0952	0,2483	0,5553	0,3070	0,0005
5	0,001	0,7226	1,1057	0,0538	0,2783	0,2245	2,20	0,3632	0,0594	0,3025	0,2431	0,0186
6	0,29	1,0781	0,4731	0,1865	0,4816	0,2951	2,67	0,1910	0,1630	0,4578	0,2948	-0,0003
7	-0,14	0,8894	1,0569	0,0604	0,2919	0,2315	2,65	0,3547	0,0629	0,3093	0,2464	0,0149
8	0,05	1,0914	0,6872	0,1301	0,4067	0,2766	3,27	0,2294	0,1344	0,4207	0,2863	0,0097
9	0,15	0,8399	0,7739	0,1103	0,3779	0,2676	2,49	0,2610	0,1129	0,3907	0,2778	0,0102
10	-0,35	0,9222	1,2470	0,0379	0,2411	0,2032	2,64	0,4356	0,0348	0,2483	0,2135	0,0103
11	0,16	0,9503	0,6735	0,1333	0,4113	0,2780	2,54	0,2520	0,1188	0,3993	0,2805	0,0025
12	-0,08	1,0659	0,8256	0,0996	0,3613	0,2617	3,07	0,2866	0,0966	0,3677	0,2711	0,0094
13	0,17	0,9627	0,6544	0,1380	0,4179	0,2799	2,76	0,2283	0,1353	0,4215	0,2862	0,0063
14	0,01	0,9899	0,7981	0,1050	0,3701	0,2651	3,29	0,2401	0,1269	0,4102	0,2833	0,0182
15	0,13	1,0289	0,6512	0,1388	0,4188	0,2800	2,83	0,2367	0,1292	0,4136	0,2844	0,0044
<u><math>a=1,40</math></u>												
1	-0,35	0,8778	1,9936	0,0037	0,0989	0,0952	2,43	0,7202	0,0022	0,0985	0,0963	0,0011
3	0,18	1,1290	1,0806	0,0571	0,2849	0,2278	3,44	0,3547	0,0629	0,3092	0,2463	0,0185
5	0,001	0,7226	1,9361	0,0045	0,1067	0,1022	2,20	0,6359	0,0057	0,1327	0,1270	0,0248
9	0,15	0,8399	1,4883	0,0194	0,1855	0,1661	2,49	0,5020	0,0202	0,2047	0,1845	0,0184
12	-0,08	1,0659	1,3885	0,0259	0,2073	0,1814	3,07	0,4821	0,0239	0,2172	0,1933	0,0119
15	0,13	1,0289	1,2343	0,0390	0,2442	0,2052	2,83	0,4488	0,0313	0,2392	0,2079	0,0027

→ Het bijbehorende interval  $[p_1, p_2]$  bevat niet de werkelijke overschrijdingskans 0,21, welke voor  $a = 0,80$  en  $a = 1,40$  resp. 0,2119 en 0,0808 zijn.



Grafiek 1.

